Enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Lemme — *Pour toute forme linéaire $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que*

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(X) = tr(AX).$$

DÉMONSTRATION
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(AM) = 0$.

Or $\mathrm{tr}(AE_{p,q}) = \mathrm{tr}\left(\left(\sum_k A_{ik}(E_{p,q})_{kj}\right)_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n} A_{ip}\delta_{qi} = A_{qp}$.

D'où $\forall p, q \in [\![1;n]\!],\ A_{p,q} = 0$ c'est-à-dire $A = 0$.

Ainsi l'application linéaire $A \mapsto \varphi_A$ est injective.

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il est de même dimension que son duale et l'application $A \mapsto \varphi_A$ est bijective. □

Proposition — *L'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme subordonnée à la norme euclidienne.*

DÉMONSTRATION
Comme la boule unité fermée $\mathbb{B}$ de $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2\right)$ est convexe, l'inclusion

$$\mathrm{Conv}\left(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right) \subset \mathbb{B}$$

est immédiate.

Soit $M \in \mathbb{B}$.
On suppose que $M \notin \mathrm{Conv}\left(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right)$. Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, son enveloppe convexe est compacte aussi.

D'après un corollaire de la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach, il existe $\varepsilon > 0$ et une forme linéaire $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall W \in \text{Conv}\left(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right),\ \varphi(W) \leqslant \varphi(M) - \varepsilon.$$

D'où

$$\sup_{W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi(W) < \varphi(M).$$

Il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(X) = \text{tr}(AX).$$

De plus par décomposition polaire, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et S symétrique positive tels que

$$A = PS.$$

D'après le théorème spectral, ils existe une base orthonormée $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de vecteurs propres de S.

Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(M) = \text{tr}(AM) = \text{tr}(MA) &= \sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, M^* e_i \rangle \text{ par passage à l'adjoint} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\| Ae_i \right\|_2 \cdot \left\| M^* e_i \right\|_2 \text{ par Cauchy-Schwarz} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\| Se_i \right\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \langle Se_i, e_i \rangle = \text{tr}(S) = \text{tr}(P^{-1}A) = \text{tr}(A \cdot P^{-1}) = \varphi(P^{-1}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\varphi(M) \leqslant \sup_{W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} \varphi(W).$$

Absurde donc $M \in \text{Conv}\left(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})\right)$. $\square$